I. Coordonnées d'un point par rapport un repère – coordonnées d'un vecteur par rapport une base :

01. Base et repère de l'espace $(\mathscr{E})$:

a. Activité :

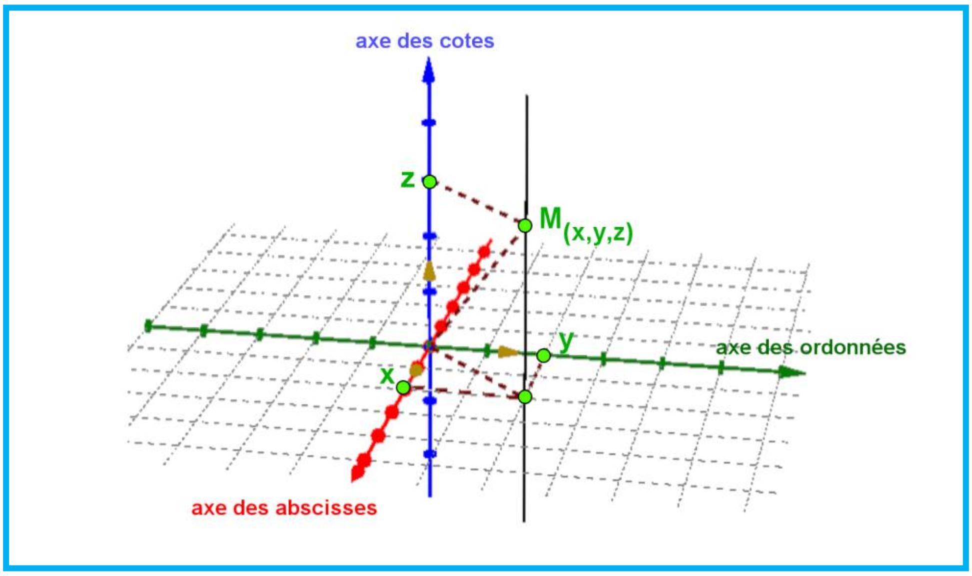
1. A partir d'un point O construire dans l'espace 3 vecteurs non coplanaires $\vec{i}$; $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
2. Construire les droites : $D_1\left(O,\vec{i}\right)$; $D_2\left(O,\vec{j}\right)$ et $D_3\left(O,\vec{k}\right)$

b. Vocabulaire :

- Le triplet $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ s'appelle base de l'espace .
- On dit que l'espace $(\mathscr{E})$ est muni (ou rapporté) de la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- Le quadruplet s'appelle repère de l'espace .
- On dit que l'espace $(\mathscr{E})$ est muni (ou rapporté au) du repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

02. Coordonnées d'un point par rapport un repère – coordonnées d'un vecteur par rapport une base :

a. Activité :



Soit l'espace $(\mathscr{E})$ est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. M est un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. On construit les points M_1 et M_2 et M_3 et M' tel que :

- M_3 est la projection de M sur la droite $D_3\left(O,\vec{k}\right)$ parallèlement au plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

  D'où : $\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ sont colinéaires donc : $\exists! z \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$ (1). (il existe un seul z de $\mathbb{R}$ car la projection de M est unique)
- M' est la projection de M sur le plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ parallèlement à la droite $D_3\left(O,\vec{k}\right)$.

  Le quadrilatère OM_3MM' est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$ (2).
- Soit le point M_1 est la projection de M' sur la droite $D_1\left(O,\vec{i}\right)$ parallèlement à la droite $D_2\left(O,\vec{j}\right)$

D'où : $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont colinéaires donc : $\exists! x \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ (3).

Soit le point M_2 est la projection de M' sur la droite $D_2(O,\vec{j})$ parallèlement à la droite $D_1(O,\vec{i})$

D'où : $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires donc : $\exists! y \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$ (4).

On a : le quadrilatère $OM_2M'M_1$ est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (5).

On déduit d'après (2) et (5) que : $\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) + \overrightarrow{OM_3}$ (6)

$\overrightarrow{OM} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) + z\vec{k}$ (7) d'après (1) et (3) et (5)

Conclusion : il existe un triplet unique (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) + z\vec{k}$ (7)

b. Vocabulaire :

- Le nombre réel x s'appelle l'abscisse du point M de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- Le nombre réel y s'appelle l'ordonné du point M de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- Le nombre réel x s'appelle la cote du point M de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

c. Définition :

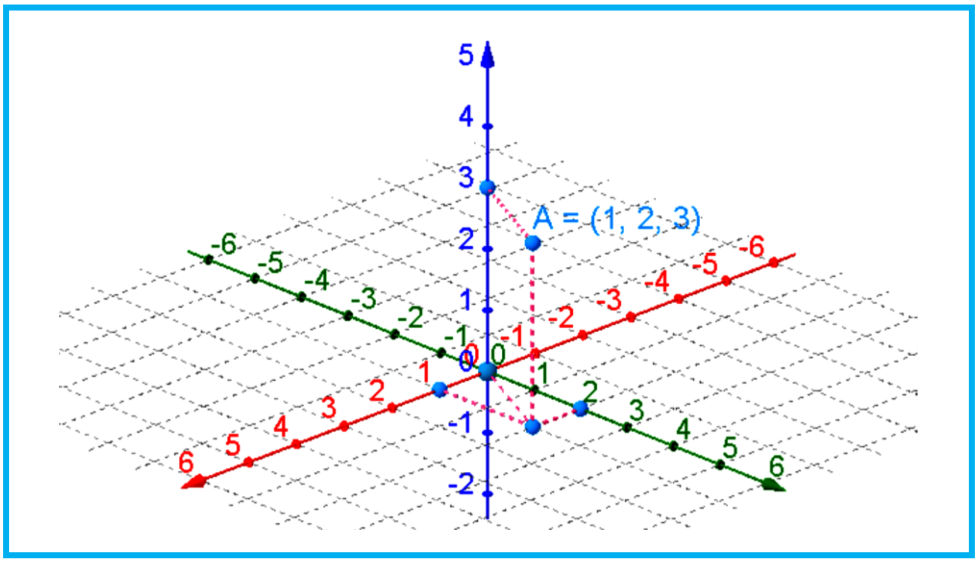
- Tout point M de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il existe un et un seul triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Le triplet (x,y,z) s'appelle les coordonnées du point M et de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note : $M(x,y,z)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Le triplet (x,y,z) s'appelle aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ de l'espace $(\mathscr{E})$ par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$(ou encore par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$) , on note : $\overrightarrow{OM}(x,y,z)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

d. Remarque :

- $M(x,y,z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exemple : $M(1,2,-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$
- $\overrightarrow{OM}(x,y,z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exemple : $\overrightarrow{OM}(1,2,-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

e. Exercice :

Construire le point $A(2,1,3)$ (ou encore $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$)



03. Coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\alpha\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$:

a. Propriété :

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs et $A(a,b,c)$, $B(a',b',c')$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $I(a_I,b_I,c_I)$ le milieu du segment $[AB]$ et α de $\mathbb{R}$. on a :

1. $(\vec{u}+\vec{v})(x+x',y+y',z+z')$ et $\alpha.\vec{u}(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z)$.
2. $\overrightarrow{AB}(a'-a,b'-b,c'-c)$.
3. $I\left(\frac{a'+a}{2},\frac{b'+b}{2},\frac{c'+c}{2}\right)$.

b. Preuve :

1. Montrons :

On a : $\vec{u}+\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})+(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$

$=x\vec{i}+x'\vec{i}+y\vec{j}+y'\vec{j}+z\vec{k}+z'\vec{k}$

$=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}+(z+z')\vec{k}$.

Conclusion : les coordonnés de $\vec{u}+\vec{v}$ est $(x+x',y+y',z+z')$

On écrit : $(\vec{u}+\vec{v})(x+x',y+y',z+z')$.

Montrons :

On a : $\alpha.\vec{u}=\alpha.(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$

$=\alpha(x\vec{i})+\alpha(y\vec{j})+\alpha(z\vec{k})$

$=(\alpha x)\vec{i}+(\alpha y)\vec{j}+(\alpha z)\vec{k}$

Conclusion : les coordonnés de $\alpha.\vec{u}$ est $(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z)$

On écrit : $\alpha.\vec{u}(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z)$.

2. : les coordonnés de $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)\\&=\left(x_B-x_A\right)\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}+\left(z_B-z_A\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$

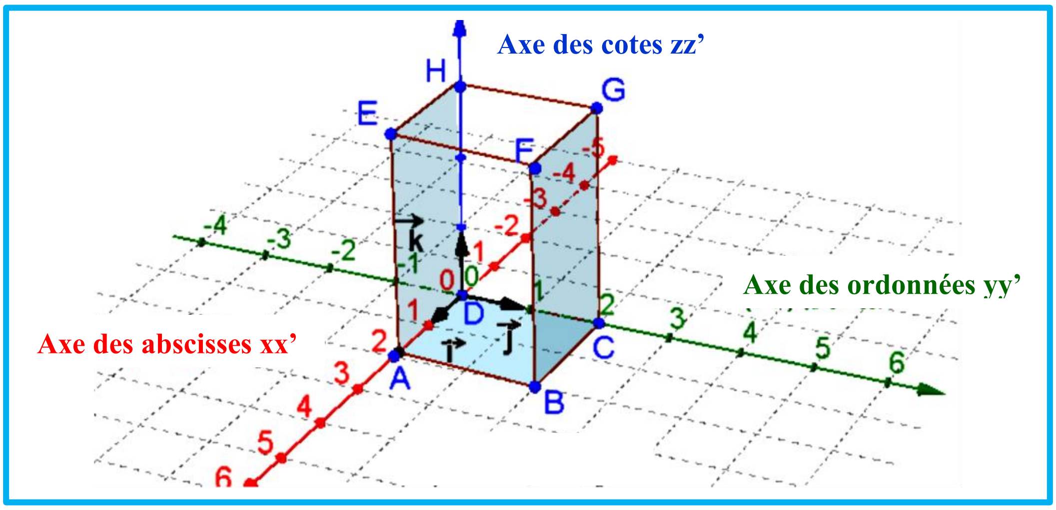
Exemple 1 : $A(1,2,3)$ et $B(-2,4,5)$

- Les coordonnées de est : $\overrightarrow{AB}(-2-1,4-2,5-3)=\overrightarrow{AB}(-3,2,2)$
- Le milieu de $[AB]$ est $I\left(\frac{-2+1}{2},\frac{4+2}{2},\frac{5+3}{2}\right)=I\left(\frac{-1}{2},3,4\right)$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$

On a : $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}=2\vec{u}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}+\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}=\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\begin{pmatrix}2+1\\3-2\\-5+7\end{pmatrix}=\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère le parallélépipède droit ABCDEFGH (voir figure ci-contre) .



1. On détermine les coordonnées les sommets de ABCDEFGH .
On a : $A(2,0,0)$ et $B=(2,2,0)$ et $C=(0,2,0)$ et $D(0,0,0)$ et $E=(2,2,2)$ et $F=(2,2,3)$ et $G=(0,2,3)$ et $H=(0,0,3)$

II. Deux vecteurs colinéaires et trois vecteurs coplanaires :

01. Condition de la colinéarité de deux vecteurs :

a. Propriété : (rappel)

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à il existe α de $\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ ou $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.

b. Les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

❖ **Définition et propriété :**

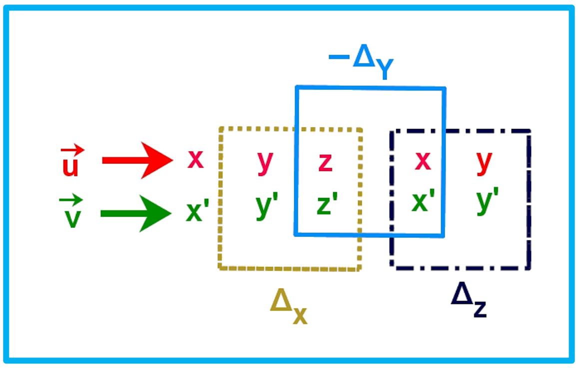
Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Les déterminants suivants :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=yz'-zy' \text{ et } \Delta_y=\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=xz'-zx' \text{ et } \Delta_z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$$ s'appellent les **déterminants extraites** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ (les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous nuls)

c. Application :



1. On étudie la colinéarité de $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On a : $\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$ d'où : $\Delta_x\neq 0$.

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

02. Condition de coplanarité de trois vecteurs $(\mathcal{E})$:

a. Déterminant de trois vecteurs de l'espace :

❖ **Définition et propriété :**

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le nombre :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

Est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre .

b. **Application :**

1. On calcule $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ avec $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$.

On a : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\times0-2\times(-7)+3\times0=14$.

Conclusion : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=14$.

c. **Méthode de calculer**

$$\begin{array}{c} \\ \\ \det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\end{array}\begin{array}{ccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \begin{vmatrix}x\\ y\\ z\end{vmatrix. & \begin{matrix}x'\\ y'\\ z'\end{matrix} & \left.\begin{matrix}x''\\ y''\\ z''\end{matrix}\right|\end{array}=\begin{array}{ccccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} & \vec{v}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \left|\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}\right. & \begin{matrix}x'\\ y'\\ z'\end{matrix} & \left.\begin{matrix}x''\\ y''\\ z''\end{matrix}\right| & \begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix} & \begin{matrix}x'\\ y'\\ z'\end{matrix}\end{array}=(1)+(2)+(3)-(4)-(5)-(6)$$

(4) (5) (6) (1) (2) (3)

Ou bien :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{matrix}\right|\begin{matrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{matrix}=(1)+(2)+(3)-(4)-(5)-(6)$$

(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

d. **Condition de coplanarité de trois vecteurs $(\mathcal{E})$:**

❖ **Propriété :**

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$.

e. **Application :**

On considère l'application précédentes : $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$.

On a : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=14$.

Conclusion : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires .

III. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace $(\mathcal{E})$:

01. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Activité :

On considère dans l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un vecteur non nul $\vec{u}(a,b,c)$ et un point donné $A(x_0,y_0,z_0)$ de $(\mathcal{E})$ et la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$

$M(x,y,z)$ est un point de $(\mathcal{E})$.

On a : $M(x,y,z)\in D\left(A,\vec{u}\right) \Leftrightarrow$ (les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u}\ ,t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Vocabulaire : l'écriture : $t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ s'appelle représentation paramétrique de la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$.

b. Définition :

Le système : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ s'appelle représentation paramétrique de la droite $D\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$.

c. Remarque :

- Pour chaque valeur du paramètre t on obtient un point et un seul et la réciproque est vraie .
- Par exemple : pour la valeur $t = 0$ donne le point $A(x_0,y_0,z_0)$.
- représentation paramétrique de la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$ n'est pas unique , on peut remplacer (x_0,y_0,z_0) par (x_1,y_1,z_1) coordonnées du point B à condition que $B\in D\left(A,\vec{u}\right)$.

d. application :

- On donne une représentation paramétrique de la droite $D\left(A(0,5,-4),\vec{u}(2,1,-3)\right)$.

une représentation paramétrique de (D) est : $D\left(A,\vec{u}\right)$: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

- On vérifie est ce-que le point $B(-2,4,-1)\in D\left(A,\vec{u}\right)$.

On a : $B(-2,4,-1)\in D \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \begin{cases} -2 = 2t \\ 4 = 5 + t \\ -1 = -4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \begin{cases} t = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ t = 4 - 5 = -1 \\ 3t = -4 + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$.

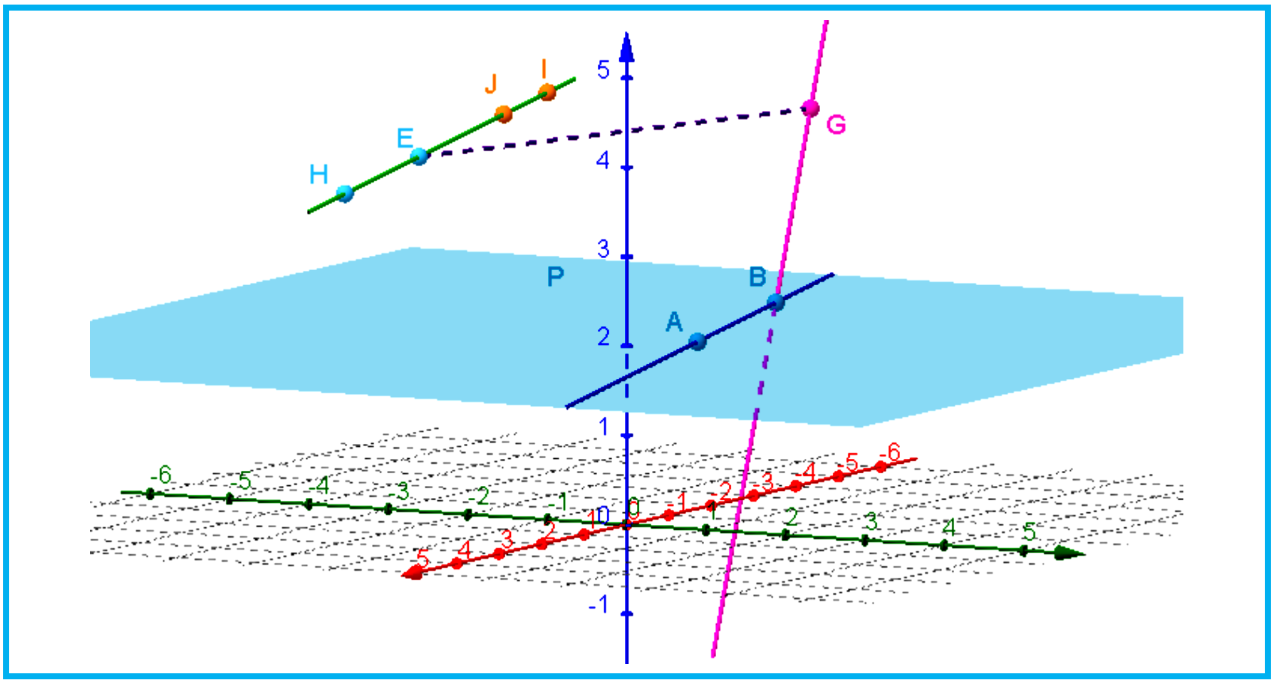
Conclusion : $B(-2,4,-1) \in D$.

02. Les positions relatives de deux droites dans l'espace $(\mathscr{E})$:

a. Activité :

On considère dans l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les droites (AB) et (EH) et (IJ) et (BG).

1. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre deux droites . voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- La droite (IJ) est confondue avec la droite (EH) on écrit $(IJ)=(EH)$.

  on dit aussi (IJ) est parallèle à la droite (EH) on note : $(IJ)//(EH)$.
- Les droites (AB) et (EH) sont strictement parallèles on a $(AB)\cap(EH)=\varnothing$,on écrit $(AB)//(EH)$.
- La droite (BG) coupe la droite (AB) au point B , on a : $(AB)\cap(BG)=\{B\}$.
- Les droites (BG) et (EH) ne se coupent pas et elles ne sont pas parallèles , ses deux droites sont appelées droites non coplanaires .

c. Propriété :

$D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{v})$ sont deux droites de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- $(D')=(D) \Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire et les deux droites ont un point commun) . exemple $A\in(D')$
- (D) et (D') sont strictement parallèles $\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire et les deux droites n'ont pas un point commun) .
- $(D')\cap(D)=\{I\} \Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et le point I est commun aux deux droites) .
- (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et les deux droites n'ont pas des points communs) .

d. Propriété :

- (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires .
- $D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{v})$ sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow \det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right) \neq 0$.

e. Application :

On considère la droite $D\left(A(0,5,-4),\vec{u}(0,1,2)\right)$ et la droite (D') dont une représentation paramétrique est : $D' : t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1 \\ y = -5-2t \\ z = 1-4t \end{cases}$.

On a :

- la droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}(0,1,2)$.
- la droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v}(0,-2,-4)$.
- on remarque : $\vec{v} = -2\vec{u}$ (on peut calculer les déterminants extraites $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$) donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et on a le point $A(0,5,-4)$ de la droite (D) ne vérifie pas la représentation paramétrique car les points de la droite (D') ont pour abscisses toujours $x=-1$) .

IV. Représentation paramétrique d'un plan – équation cartésienne d'un plan de l'espace $(\mathscr{E})$:

01. Représentation paramétrique d'un plan :

a. Activité :

- $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs non colinéaire de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$.
- On considère le plan $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ (passe par le point A a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) .

1. $M(x,y,z)$ est un point du plan $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ alors :

$$M(x,y,z) \in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \ ; \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ ; \ \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ ; \ \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' \\ \beta b' \\ \beta c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ ; \ \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' \\ \alpha b+\beta b' \\ \alpha c+\beta c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x-x_A=\alpha a+\beta a' \\ y-y_A=\alpha b+\beta b' \\ z-z_A=\alpha c+\beta c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=x_A+\alpha a+\beta a' \\ y=y_A+\alpha b+\beta b' \\ z=z_A+\alpha c+\beta c' \end{cases}$$

L'écriture $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=x_A+\alpha a+\beta a' \\ y=y_A+\alpha b+\beta b' \\ z=z_A+\alpha c+\beta c' \end{cases}$ est appelée représentation paramétrique d'un plan $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$

b. Définition :

Le système : $\begin{cases} x=x_0+a\alpha+a'\beta \\ y=y_0+b\alpha+b'\beta \\ z=z_0+c\alpha+c'\beta \end{cases}$; $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ s'appelle représentation paramétrique du plan $P\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right)$ de l'espace $(\mathcal{E})$.

c. Remarque :

- Pour chaque valeur du paramètre α et du paramètre β on obtient un point et un seul et la réciproque est vraie .
- Par exemple : pour la valeur $\alpha=0$ et $\beta=0$ donne le point $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$.
- représentation paramétrique du plan $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ n'est pas unique on peut remplacer $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ par $\left(x_1,y_1,z_1\right)$ coordonnées du point B à condition que $B\in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$.

d. application :

- On donne une représentation paramétrique du plan $P\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

une représentation paramétrique de (P) est : $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)\begin{cases} x=1+3\alpha+2\beta \\ y=-2+5\alpha-4\beta \\ z=7+9\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

- On vérifie est ce-que le point $B(5,12,-2)\in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On a :

$$B(5,12,-2)\in D \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} / \begin{cases} 5=1+3\alpha+2\beta \\ 12=-2+5\alpha-4\beta \\ -2=7+9\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} / \begin{cases} 5=1+3\alpha+2\beta \\ 12=-2+5\alpha-4\beta \\ -9=9\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} / \begin{cases} 5=1+3\alpha-2 \\ 12=-2+5\alpha+4 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} / \begin{cases} \alpha=2 \\ \alpha=2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

Conclusion : $B(5,12,-2)\in(P)$.

02. équation cartésienne d'un plan de l'espace $(\mathscr{E})$:

a. activité :

On considère dans l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le plan $P\left(A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}\right)$

$M(x,y,z)$ est un point de $(\mathscr{E})$.

$M(x,y,z)\in P(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires .

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a' & a'' \\ y-y_0 & b' & b'' \\ z-z_0 & c' & c'' \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}-(y-y_0)\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\Delta_x-y\Delta_y+z\Delta_z+(-x_0\Delta_x+y_0\Delta_y-z_0\Delta_z)=0$$

$$\Leftrightarrow ax+b\Delta_y+c\Delta_z+d=0 \quad (1)$$

Avec :

$a=\Delta_x=b'c''-c'b''$ et $b=\Delta_y=a'c''-c'a''c=$ et $\Delta_z=a'b''-b'a''$ et $d=-x_0\Delta_x+y_0\Delta_y-z_0\Delta_z$

b. vocabulaire :

l'équation obtenue (1) : $ax+b\Delta_y+c\Delta_z+d=0$ est appelée équation cartésienne du plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$.

c. définition et propriété :

Soit $P\left(A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}\right)$ est un plan de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- le plan (P) est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie l'équation : $(x-x_0)\Delta_x-(y-y_0)\Delta_y+(z-z_0)\Delta_z=0$ avec $a=\Delta_x$ et $b=\Delta_y$ et $c=\Delta_z$ sont les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- L'équation : $(x-x_0)\Delta_x-(y-y_0)\Delta_y+(z-z_0)\Delta_z=0$ s'appelle équation cartésienne du plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$.
- En générale l'équation s'écrit : $P(A,\vec{u},\vec{v})$: $ax+by+cz+d=0$ avec $a=\Delta_x$ et $b=\Delta_y$ et $c=\Delta_z$ et $d=-x_0\Delta_x+y_0\Delta_y-z_0\Delta_z$ sont des réels et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ (au moins un nombre est non nul) .

d. Application :

On donne équation cartésienne du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$

1ère méthode :

$M(x,y,z)\in P(O,\vec{i},\vec{j})\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{i},\vec{j})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x&1&0\\y&0&1\\z&0&0\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow x\times0-y\times0+z\times1=0$

$\Leftrightarrow z=0$

2ième méthode :

(P) a pour équation de la forme: $P: ax+by+cz+d=0$

on a : $a=\Delta_x=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0, b=\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0, c=\Delta_z=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$

d'où : $P: 0x+0y+1z+d=0$

on a : $O(0,0,0)\in(P)\Leftrightarrow 0+0+0+d=0$ donc $d=0$

par suite : $(P): z=0$

Conclusion : équation cartésienne du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est : $z=0$

e. Remarque :

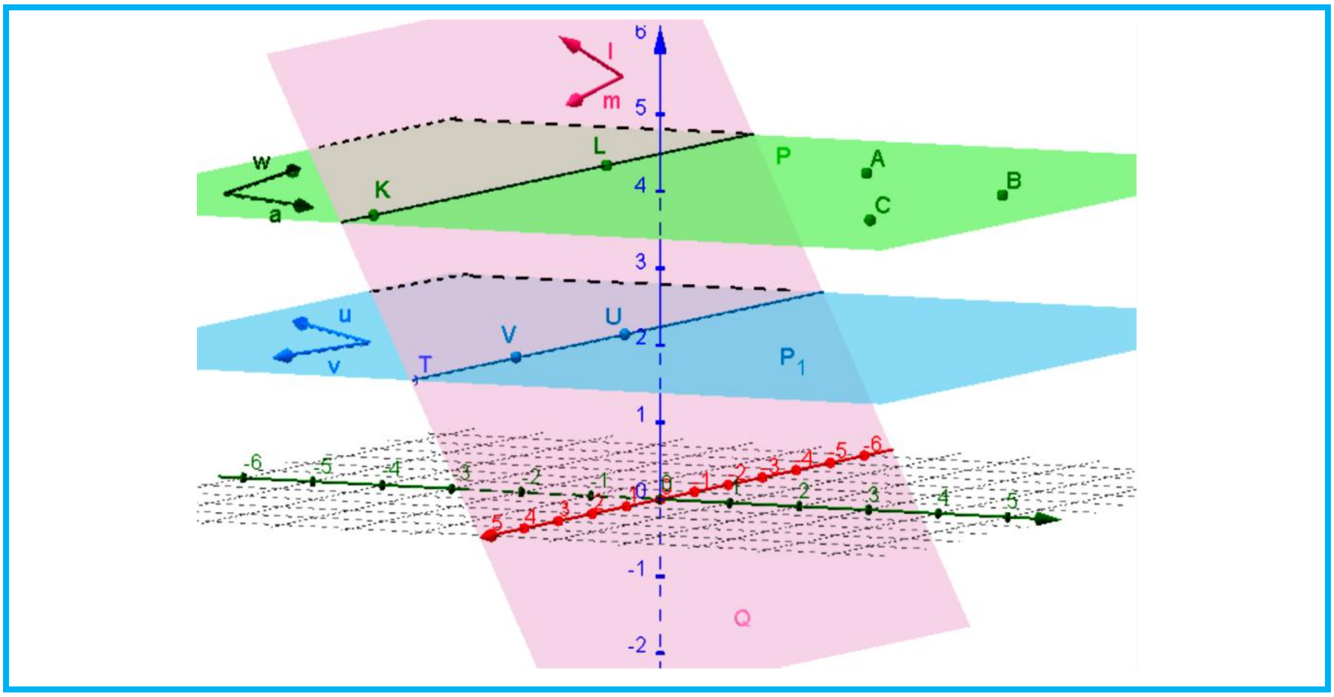
- l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $z=0$ est le plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$.
- l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $y=0$ est le plan $P(O,\vec{i},\vec{k})$.
- l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x=0$ est le plan $P(O,\vec{j},\vec{k})$.

03. Positions relatives de deux plans :

a. Activité :

On considère dans l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les droites (P) et (P_1) et (Q) et (ABC).

2. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre deux plans . voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- Le plan (P) est confondu avec le plan (ABC) on écrit $(P)=(ABC)$
  on dit aussi (P) est parallèle au plan (ABC) on note : $(P)\parallel(ABC)$.
- Les plans (P) et (P_1) sont strictement parallèles on a $(P)\cap(P_1)=\varnothing$, on écrit $(P)\parallel(P_1)$.
- Les plans (P) et (Q) se coupent suivant la droite (KL) , on écrit $(P)\cap(Q)=(KL)$

c. Propriété :

(P) : $ax+by+cz+d=0$ et (P') : $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont deux plans de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.(sans oublier que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $(a',b',c')\neq(0,0,0)$)

- Les 2 plans sont confondues : $(P)=(P') \Leftrightarrow$ ($a'=ka$ et $b'=kb$ et $d'=kd$ et $k\neq 0$)

  ou encore : Les 2 plans sont confondus : $(P)=(P') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'} \right)$ (à conditions les nombres sont tous non nuls)
- Les 2 plans sont strictement parallèles : $(P')\cap(P)=\varnothing \Leftrightarrow$ ($a'=ka$ et $b'=kb$ et $d'\neq kd$)

  ou encore : Les 2 plans sont strictement parallèles: $(P')\cap(P)=\varnothing \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k \text{ et } d\neq kd'\right)$
- Les 2 plans sont sécants suivant une droite : $(P')\cap(P)=(D) \Leftrightarrow$ ($\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ ne sont pas colinéaires) .

  ou encore : Les 2 plans sont sécants suivant une droite : $(P')\cap(P)=(D) \Leftrightarrow$ (au moins deux rapports suivants $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$ ne sont pas égaux .

d. Remarque :

- ($P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ sont deux plans sécants) $\Leftrightarrow$ (à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ sont coplanaires et aussi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{v'}$).
- ($P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ sont deux plans sécants) $\Leftrightarrow \left(\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u'}\right)=0 \text{ et } \det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{v'}\right)=0\right)$.

e. Propriété :

- (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires .
- (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow \det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)\neq 0$.

f. Application :

On considère les plans (P) : $2x-6z+5=0$ et (P') : $-x+3z+1=0$.

On a : $\frac{2}{-1}=\frac{-6}{3}=-2$ et $\frac{5}{1}\neq -2$ donc les deux plans sont strictement parallèles

Conclusion : $(P')\cap(P)=\varnothing$.

V. Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace $(\mathscr{E})$:

01. Système de deux équations cartésiennes d'une droite :

a. Activité :

Dans l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on a : $t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $D\left(A\left(x_0,y_0,z_0\right),\vec{u}(a,b,c)\right)$.

- **1er cas :** on suppose que les nombres a et b et c sont non nuls :

On a :

$$\left.\begin{matrix}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=t\\\frac{y-y_0}{b}=t\\\frac{z-z_0}{c}=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

L'écriture : $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$

. (remarque $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ sont des équations de 2 plans $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ et $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$)

- $2^{\text{ième}}$ **cas :** on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a=0$)

On a : $\left.\begin{array}{l} x=x_0+0\times t \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{b}=t \\ \dfrac{z-z_0}{c}=t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x-x_0=0 \text{ et } \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

L'écriture : $x-x_0=0$ et $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A,\vec{u})$. (remarque $x-x_0=0$ et $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ sont des équations de 2 plans)

- $3^{\text{ième}}$ **cas :** on suppose que juste deux nombres parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a=0$ et $c=0$)

On a : $\left.\begin{array}{l} x=x_0+0\times t \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+0\times t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{b}=t \\ z-z_0=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x-x_0=0 \text{ et } z-z_0=0$$

L'écriture : $x-x_0=0$ et $z-z_0=0$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A,\vec{u})$. (remarque $x-x_0=0$ et $z-z_0=0$ sont des équations de 2 plans)

Remarque : on ne peut pas avoir les 3 nombres a et b et c sont tous nuls car $\vec{u}(a,b,c)\neq\vec{0}$ c'est un vecteur directeur de la droite $D(A,\vec{u}(a,b,c))$ donc : $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

b. Propriété et définition :

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère la droite $D(A(x_0,y_0,z_0),\vec{u}(a,b,c))$.

Un point $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ appartient à la droite $D(A,\vec{u})$ si et seulement si on a :

- 1^{er} **cas :** on suppose que les nombres a et b et c sont non nuls :

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A,\vec{u})$.

- *$2^{\text{ième}}$ **cas :** on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a=0$)

$x-x_0=0$ et $\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A,\vec{u})$

- $3^{\text{ième}}$ **cas :** on suppose que juste deux nombres parmi les nombres a et b et c est nul : (on suppose $a=0$ et $c=0$).

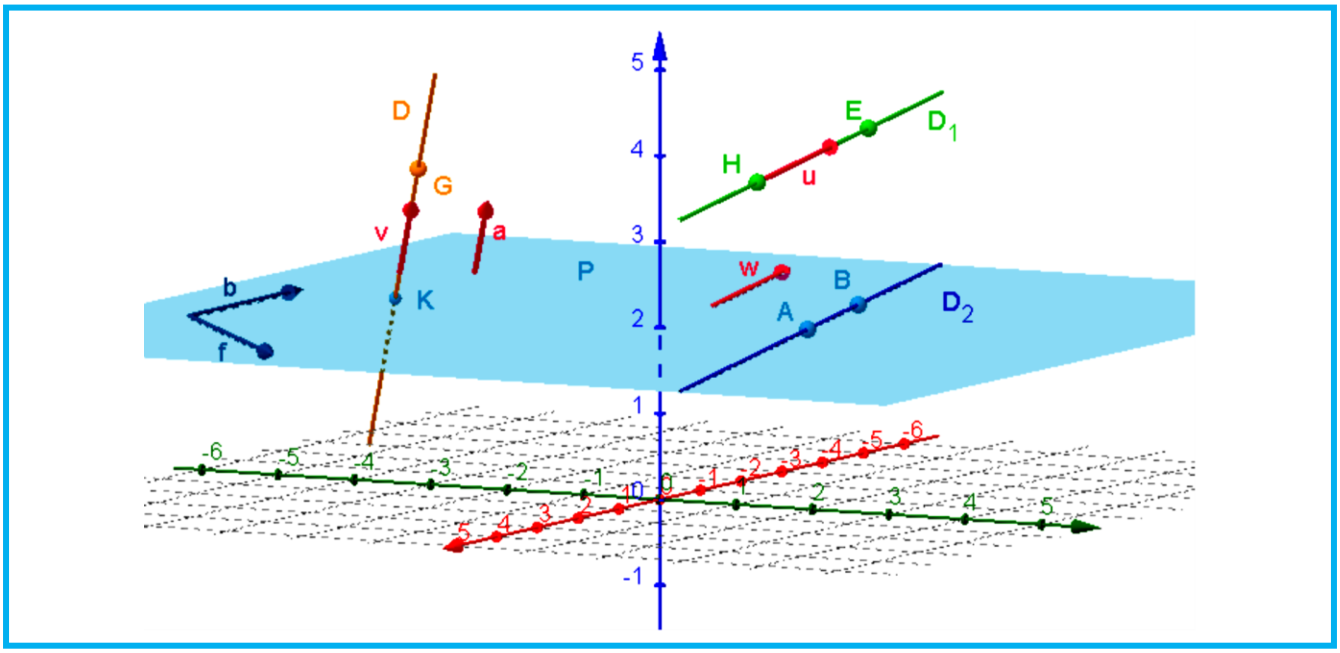
$x-x_0=0$ et $z-z_0=0$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A,\vec{u})$.

02. Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Activité :

On considère dans l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une droite (D) et un plan (P)

3. On déduit les différentes positions relatives distinctes entre le plan et la droite .voir figure ci-contre .



b. Vocabulaire :

- La droite (D) est inclue dans le plan (P) , on écrit $(D)\subset(P)$ on a : $(D)\cap(P)=(D)$
  on dit aussi (D) est parallèle au plan (P) on note : $(D)\parallel(P)$.
- Le droite (D) est strictement parallèle à (P) on a $(D)\cap(P)=\varnothing$, on écrit $(P)\parallel(P_1)$.
- Le plan (P) et la droite (D) se coupent au point K la droite (KL) , on écrit $(D)\cap(P)=\{K\}$.
  on dit aussi la droite (D) et le plan (P) sont sécants en K .

c. Propriété :

Soient $D(B,\vec{w})$ une droite et $P(A,\vec{u},\vec{v})$ un plan de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- (La droite (D) est inclue dans le plan (P)) $\Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et $B\in(P)$) .
  $$\Leftrightarrow\left(\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0 \text{ et } B\in(P)\right).$$
- (Le droite (D) est strictement parallèle à (P)) $\Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et $B\notin(P)$)
  $$\Leftrightarrow\left(\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0 \text{ et } B\notin(P)\right).$$
- la droite (D) coupe le plan (P) au point A) $\Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires) .
  $$\Leftrightarrow\left(\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0\right).$$